MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II BÜTÜNLEME SORULARI

UYARI!!! 11.07.2021

- **Sadece sonuçları yazmayınız, ara işlemlere de puan dağıtılıyor.**
- **Aynı-benzer kağıtlar puanlandırılmayacaktır.**
- **Süre 90 dakikadır, süre içinde cevaplarınızı gönderiniz.**

1. $x^4y''-4x^3y'+6x^2y=x^4$ denkleminin homojen kısmının $y=x^n,\ n\in\mathbb{Z}$ şeklindeki lineer bağımsız çözümlerini bularak genel çözümünü bulunuz.

2. $xy''-3y'-x^2=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y^{(4)}+4y''=e^x+2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $y''-2y'+y=e^{-x}$ denkleminin $y(0)=0,\ y'(0)=1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Başarılar...

Doç. Dr. Fatma HIRA

Cevaplar

① $y=x^n$ çözüm ise denklemi sağlar. $y'=nx^{n-1}$, $y''=n(n-1)x^{n-2}$ için

$x^4y''-4x^3y'+6x^2y=0 \Rightarrow n(n-1)x^{n+2}-4nx^{n+2}+6x^{n+2}=0 \Rightarrow (n^2-5n+6)\underbrace{x^{n+2}}_{\neq 0}=0$

$n^2-5n+6=0$

$n=2,\ n=3$

$y_1=x^2,\ y_2=x^3$ lineer bağımsız çözümlerdir ve $y_h=c_1x^2+c_2x^3$ olur.

$y''-\frac{4}{x}y'+\frac{6}{x^2}y=1$ denklemi için özel çözüm parametrelerin değişimi yöntemi ile aranırsa

$y_ö=c_1(x)x^2+c_2(x)x^3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1'(x)x^2+c_2'(x)x^3=0 \\ c_1'(x)2x+c_2'(x)3x^2=1 \end{array}\right\}$

$c_2'(x)\cdot(-x^3)=-x \Rightarrow c_2'(x)=\frac{1}{x^2}$

$c_2(x)=-\frac{1}{x}$

$c_1'(x)=-\frac{1}{x} \Rightarrow c_1(x)=-\ln x$

$y_ö=-x^2\ln x-x^2$ olup

genel çözüm

$y=y_h+y_ö=c_1x^2+c_2x^3-x^2\ln x-x^2$

veya $y=ax^2+bx^3-x^2\ln x$ bulunur.

$x^2y''-4xy'+6y=x^2$ şeklinde Cauchy Euler denklemi olarak da düşünülüp çözülebilir.

② $xy''-3y'=x^2 \Rightarrow x^2y''-3xy'=x^3$ Cauchy Euler denklemidir.

$x=e^t$ dönüşümü ile $(D(D-1)-3D)y=e^{3t} \Rightarrow (D^2-4D)y=e^{3t}$

sabit katsayılı denklem elde edilir.

$\lambda^2-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=4 \Rightarrow y_1=1,\ y_2=e^{4t}$ için

$y_h=c_1+c_2e^{4t}$ dır. $y_ö=\frac{1}{D^2-4D}e^{3t}=-\frac{1}{3}e^{3t}$ özel çözümdür.

$y=y_h+y_ö=c_1+c_2e^{4t}-\frac{1}{3}e^{3t} \Rightarrow y=c_1+c_2x^4-\frac{1}{3}x^3$ bulunur.

CamScanner ile tarandı

③ $y^{(4)} + 4y'' = e^x + 2$ sabit katsayılı homojen olmayan denklem

$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = -2i$

$y_1 = e^{0x} = 1 \qquad y_3 = \cos 2x$

$y_2 = xe^{0x} = x \qquad y_4 = \sin 2x$

$y_h = c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$ dur.

e^x için $y_{ö1} = Ae^x$

2 için $y_{ö2} = B \rightarrow y_{ö2} = Bx \rightarrow y_{ö2} = Bx^2$ olarak aranmalıdır.

Buna göre $y_ö = Ae^x + Bx^2$ olarak aranırsa

$y_ö' = Ae^x + 2Bx \quad y_ö'' = Ae^x + 2B, \quad y_ö''' = Ae^x, \quad y_ö^{(4)} = Ae^x$ olup

denklemde yerine yazılırsa

$Ae^x + 4Ae^x + 8B = e^x + 2 \Rightarrow \quad 5A = 1 \quad 8B = 2$

$A = \frac{1}{5} \quad B = \frac{1}{4}$

$y_ö = \frac{1}{5}e^x + \frac{1}{4}x^2$ özel çözüm olup genel çözüm

$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x + \frac{1}{4}x^2$ dur.

④ $y'' - 2y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow y_1 = e^x, \; y_2 = xe^x$ olup

$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$ dur.

$y_ö = \frac{1}{(D-1)^2}(e^{-x}) = \frac{1}{4}e^{-x}$ özel çözüm olup genel çözüm

$y = y_h + y_ö = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ dur.

$y(0) = 0$ ise $\Rightarrow 0 = c_1 + \frac{1}{4} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{4}$

$y' = c_1 e^x + c_2(e^x + xe^x) - \frac{1}{4}e^{-x}$

$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{4}e^x + \frac{3}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ istenen özel çözümdür

Ⓐ Laplace dönüşümü uygulanarak da çözüm bulunabilir.